Economía y Finanzas Matemáticas

Mercados Financieros Discretos

Rafael Orive Illera
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
rafael.orive@uam.es

Abril 2018

Situación

- Consideramos un número finito de tiempos. Caso más sencillo:
  - 0, ahora
  - 1, futuro
- d posibles activos $(S^1, \ldots, S^d) = S$ (vector), son los elementos del Mercado M, son variables aleatorias.
- S_t^i es el valor en t del activo S^i
- $\{S_t^i\}$ va a tomar un número finito de valores
- Una combinación de dos activos o más es un nuevo subyacente sintético
- Λ representa el conjunto de inversores
- $\mathcal{F}_1 = \sigma(S^1, \ldots, S^d)$ la información del mercado
- Cada $\alpha \in \Lambda$ tiene definida en $\mathcal{F}_1$ una probabilidad P_α.
- **Hipotesis**: $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$, tenemos que $P_\alpha \sim P_\beta$

Teoría de las carteras

La cartera (portfolio) es el conjunto de todas las posiciones en todos los activos (largos o cortos) que tiene un individuo o institución.

Una estrategia (φ) consiste en la decisión de invertir en 0 comprando φ_i unidades del activo S_i y esperar hasta el instante 1: Modelo de un Periodo

El valor de la cartera en $t = 0, 1$: $V_t = \sum_1^d \varphi_i S_t^i = \varphi \cdot S_t$. Es una variable aleatoria.

Llamamos la función de precio $\Pi : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo elemento del mercado nos da su precio actual: $\Pi(S_1^i) = S_0^i$.

Hipotesis para el mercado y las carteras:

- No existen fricciones en la economía:
  - No hay costes de transacción
  - No hay impuestos
  - No hay restricciones a posiciones cortas
- La competencia es perfecta: Estamos en un mercado competitivo donde los subyacentes disponibles son precio-aceptantes
- Suponemos los subyacentes divisibles

En general, el conjunto de las estrategias admisibles puede tener restricciones: Quiebras, bancarrotas, posiciones en corto,...

Arbitraje

Un arbitraje es una estrategia de cartera con un número finito de subyacentes donde la posibilidad de ganar sin arriesgar es real. Existirán oportunidad de arbitraje en los siguientes casos:

1. Si existe una estrategia $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ con precio $\Pi(\varphi \cdot S_1) \leq 0$ tal que para algún $\alpha \in \Lambda$ se verifique:

$$P_\alpha(\varphi \cdot S_1 \geq 0) = 1 \;\text{ y }\; P_\alpha(\varphi \cdot S_1 > 0) > 0$$

2. Si existe una estrategia $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ con precio $\Pi(\varphi \cdot S_1) \geq 0$ tal que para algún $\alpha \in \Lambda$ se verifique:

$$P_\alpha(\varphi \cdot S_1 \leq 0) = 1 \;\text{ y }\; P_\alpha(\varphi \cdot S_1 < 0) > 0$$

3. Si existe una estrategia $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ con precio $\Pi(\varphi \cdot S_1) \neq 0$ tal que para algún $\alpha \in \Lambda$ se verifique:

$$P_\alpha(\varphi \cdot S_1 = 0) = 1$$

4. Si existe una estrategia $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ asociada a un número finito de activos $S^1, \ldots, S^d$ tal que

$$\Pi\left(\sum_1^d \varphi_j S^j\right) \neq \sum_1^d \varphi_j \Pi(S^j)$$

No hay más tipos de arbitraje. En nuestra economía supondremos la ausencia de arbitrajes

Consecuencia. En ausencia de arbitraje, para todo activo $S \in M$ tal que existe $\alpha \in \Lambda$ con $P_\alpha(S_1 \geq 0) = 1$ y $P_\alpha(S_1 > 0) > 0$ verifica necesariamente $S_0 = \Pi(S_1) > 0$.

Definimos los rendimientos relativos (rate of return) y rendimientos (total return): (variables aleatorias)

$$R_i = \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i} \qquad \widehat{R}_i = \frac{S_1^i}{S_0^i}$$

Así,

$$V_1 = \sum_1^d \varphi_i S_1^i = \sum_1^d \varphi_i S_0^i (1 + R_i) = \sum_1^d \varphi_i S_0^i \widehat{R}_i$$

Teorema de valoración en ausencia de arbitraje. El rendimiento (resp. rendimiento relativo) de una cartera es igual a la media ponderada de los rendimientos (resp. rendimientos relativos) de los subyacentes que lo componen.

Efectivamente,

$$\widehat{R} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{\sum \varphi_i S_0^i \widehat{R}_i}{\sum \varphi_i S_0^i} = \sum w_i \widehat{R}_i,$$

donde $w_i = \varphi_i S_0^i / (\sum \varphi_i S_0^i)$ es el peso del i-éximo activo en la cartera. Analogamente,

$$R = \frac{\Delta \Pi}{\Pi} = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \sum w_i R_i.$$

Prima de riesgo

Llamamos activo sin riesgo al activo S^0 tal que $S^0_0 = 1$, $S^0_1 = 1 + r_f$ donde r_f, su rendimiento, es conocido.

llamamos prima de riesgo del activo $S \in M$ con respecto a un inversor $\alpha \in \Lambda$ a la cantidad

$$\boxed{E_\alpha[R_S] - r_f}$$

Proposición. La prima de riesgo de una cartera es la media ponderada de las primas de riesgo de los activos que lo componen:

$$E_\alpha[R] - r_f = \sum w_j (E_\alpha[R_j] - r_f)$$

Modelo de un periodo

- Nuestra economía va a tener m posibles estados a vencimiento con sus probabilidades

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}, \qquad P(\omega_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Tenemos $N+1$ subyacentes $S = (S^0, S^1, \ldots, S^N)$ y su proceso de precios

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^N) \qquad t = 0, 1.$$

- Suponemos que los rendimientos de los subyacentes son linealmente independientes
- $N + 1 \leq m$, m dimensión del e. v. de las variables aleatorias

- S^0 es el subyacente sin riesgo (cuenta bancaria)
  - $S_0^0 = 1$, hipotesis de normalización
  - $S_1^0 > 0$, en general, $S_1^0 \geq 1$
  - Rendimiento del activo sin riesgo $r = S_1^0 - 1$ (tipo de interés)
- Proceso de precios descontados:

$$\widetilde{S}_t = (\widetilde{S}_t^0, \ldots, \widetilde{S}_t^N), \qquad \widetilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad \forall i, t$$

- El valor descontado de una cartera

$$\widetilde{V}_t(\varphi) = V_t(\varphi)/S_t^0.$$

- El subyacente asociado a los valores descontados actua como numerario.

Un producto financiero X_1 (v.a. en Ω) es un activo contingente o es replicable si existe una estrategia de cartera φ tal que

$$X_1 = \varphi \cdot S_1$$

La economía es completa si todos los activos son replicables.

Proposición. Si X es replicable $X = \varphi \cdot S_1$ admite solución y, si la economía es viable, dicha solución es única (en cierto sentido).

Marco general: Tenemos m estados en 1 y $N+1$ subyacentes. Determinar que un activo es replicable es resolver un sistema de m ecuaciones y $N+1$ incógnitas. Modelo Matricial
S_1 va a ser una matriz de $N+1$ filas y m columnas.

Proposición. Es replicable si los rangos de S_1 y $(X_1 S_1)$ son iguales. La economía es completa si rango de S_1 es m. Entonces, $m = N + 1$.

La economía es viable si no existen oportunidades de arbitraje.

Proposición. Supongamos la existencia de un vector $q = (q_1, \ldots, q_m)$ $q_j > 0\ \forall j$ tal que para toda estrategia φ del mercado se verifique:

$$\boxed{\widetilde{V}_0(\varphi) = \sum_j q_j \widetilde{V}_1(\varphi)(\omega_j)}$$

Entonces, la economía es viable.

Proposición. Bajo la suposición anterior, $Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(\omega_i) = q_i$, $\forall i$. Entonces, Q define una probabilidad en Ω, conocida como probabilidad descuento y también probabilidad riesgo neutro

Consecuencias. La condición suficiente de viabilidad se escribe como:

- Propiedad de martingala con respecto de Q

$$\boxed{\widetilde{V}_0(\varphi) = E_Q[\widetilde{V}_1(\varphi)]}$$

- Propiedad de riesgo neutro. El numerario es la cuenta bancaria y

$$V_0(\varphi) = \frac{E_Q[V_1(\varphi)]}{1+r}$$

Teorema. La economía es completa y viable si, y solo si, existe una única probabilidad de riesgo neutro o probabilidad martingala Q:

$$\widetilde{V}_0(\varphi) = E_Q[\widetilde{V}_1(\varphi)], \qquad \forall \varphi.$$

Proposición. Sea P la probabilidad subjetiva de un inversor y Q la probabilidad de riesgo neutro. Entonces, en una economía viable:

$$\widetilde{S}_0 = E_Q[\widetilde{S}_1] = E_P[Z\widetilde{S}_1], \qquad \text{siendo } Z(\omega_j) = \frac{Q(\omega_j)}{P(\omega_j)}$$

Esta es la relación que nos define el precio en ausencia de arbitraje con una probabilidad subjetiva. Z es la derivada de Radon-Nikodyn de Q con respecto de P. También se le suele llamar densidad (o vector) de estados de precios.

$$\text{Si} \quad Q \sim P, \qquad Z = \frac{dQ}{dP}$$

Elegir un numerario (S^0) es determinar la unidad de trabajo del mercado

Proposición. Sea S^n subyacente tal $S_1^n(w_j) \neq 0$, $\forall \omega_j \in \Omega$ y de precio no nulo. Entonces, S^n es un numerario.

Teorema. Sea una economía completa y viable. Sean S^n y S^m dos numerarios y, Q_n y Q_m las probabilidades martingalas asociadas. Entonces se satisface

$$S_0^n E_{Q_n}[S_1^i/S_1^n] = S_0^m E_{Q_m}[S_1^i/S_1^m], \quad \forall i = 0, \ldots, N$$

Activos de Arrow-Debreu

Sea una economía completa y viable. Los activos de Arrow-Debreu, A_T^i con $i = 1, \ldots, m$, se definen como

$$A_T^i(\omega_j) = \delta_{ij}, \qquad \text{para } j = 1, \ldots, m$$

Proposición. Sean A_0^i el valor en 0 de los activos de Arrow-Debreu. Entonces, para cualquier subyacente

$$S_0 = \sum_{1}^{m} S_T(\omega_i) A_0^i$$

Proposición. Sea S un activo numerario. Entonces, la probabilidad martingala asociada a S, Q_S, se define como:

$$\boxed{Q_S(\omega_i) = \frac{S_T(\omega_i) A_0^i}{S_0}}$$

Se puede usar esta expresión para:

- Calcular los A_0^i
- Calcular la probabilidad martingala, Q
- Calcular las densidades entre probabilidades martingalas:

$$Q_n \text{ y } Q_m \text{ probabilidades} \quad Z_{nm}(\omega_j) = \frac{Q_n(\omega_j)}{Q_m(\omega_j)}.$$

Valor de una opción de compra, call

Economía con dos estados a vencimiento (subir, bajar) y dos activos (cuenta corriente con rendimiento r, acción $S = \{uS_0, dS_0\}$). Es economía completa y viable si:

$$d < 1 + r < u$$

Una opción europea c de precio de ejercicio K con

$$dS_0 < K < uS_0.$$

Su precio y estrategia son:

$$c_0 = \frac{(uS_0 - K)(1 + r - d)}{(1 + r)(u - d)} \quad \text{y} \quad \varphi_0^1 = \frac{uS_0 - K}{(u - d)S_0}$$